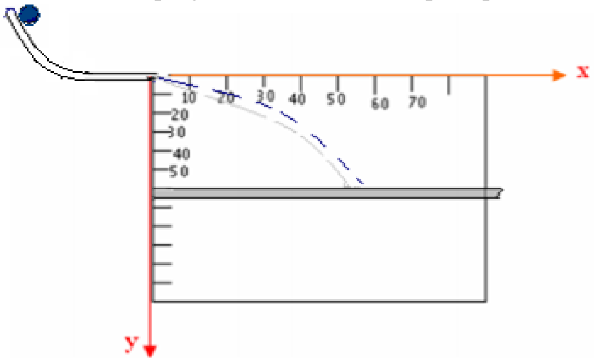
Le mouvement d'un projectile dans le champ de pesanteur

I-Trajetoire du mouvement d'un projectile dans le champ de pesanteur:

On utilise le dispositif d'étude du mouvement d'un projectile dans le champ de pesanteur suivant:



La bille est maintenue par électroaimant puis lâchée du haut d'un rail.
Elle roule le long du rail puis le quitte avec une vitesse initiale horizontale et elle tombe sur une plaque horizontale.
En variant la position de la plaque et en indiquant chaque fois sa position de chute, on obtient la trajetoire de son mouvement: c'est une **trajetoire parabolique.**

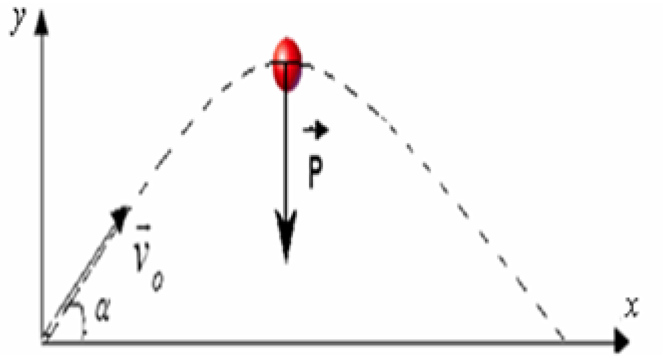
I-Etude du mouvement d'un projectile dans le champ de pesanteur:

1) Lancer d'un projectile :

Un projectile de masse m est lancé d'un point O à l'instant t=0 avec une vitesse $\vec{v}_o$ qui fait un angle α avec l'horizontale.

2) Les conditions initiales et le choix du repère d'espace :

On considère un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ confondu avec le plan du mouvement du projectile et qu'on suppose galiléen.



On a : à t=o ,$x_o=0$ et $y_o=0$

Les coordonnées du vecteur vitesse initiale sont : $\vec{V}_0 \begin{cases} V_{0x}=V_0\cos\alpha \\ V_{0y}=V_0\sin\alpha \end{cases}$

3) Etude du mouvement du projectile :

- Le système étudié :{le projectile}
- Bilan des forces: le projectile est soumis uniquement à l'action de son poids : $\vec{P}$
  (Le projectile a une grande densité, donc la poussée d'Archimède et les forces de frottement fluides sont négligeables)
- Représentation des forces: voir schéma précédent.
- En appliquant la 2ème loi de Newton : $\Sigma\vec{F}=m.\vec{a}_G \Rightarrow \vec{P}=m.\vec{a}_G$ **(1)**

4) Les équations horaires du mouvement :

-Par projection de la relation (1) dans le repère (O,x,y) :

$$\begin{cases} P_x = m.a_x \\ P_y = m.a_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = m.a_x \\ -P = m.a_y \end{cases} \text{ donc : } \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases} \text{ d'où : } \begin{cases} \dfrac{dv_x}{dt} = 0 \\ \dfrac{dv_y}{dt} = -g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x = C \\ v_y = -g.t + C' \end{cases}$$

On détermine les constantes C et C'

en utilisant les conditions initiales : or à t=0 : $v_{oy} = v_o.\sin\alpha$ et : $v_{ox} = v_o.\cos\alpha$

D'où les coordonnées du vecteur vitesse $\begin{cases} v_x = v_o.\cos\alpha \\ v_y = -g.t + v_o.\sin\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = v_o.\cos\alpha \\ \dfrac{dy}{dt} = -g.t + v_o.\sin\alpha \end{cases}$ donc : $\begin{cases} x = (v_o.\cos\alpha).t + K \\ y = -\dfrac{1}{2}g.t^2 + (v_o.\sin\alpha).t + K' \end{cases}$

On détermine les constantes K et K' en utilisant les conditions initiales :or à t=0 , $x_o=0$ et $y_o=0$ donc :K=0 et K'=0.

Et on obtient les équations horaires du mouvement du projectile $\begin{cases} x = (v_o.\cos\alpha).t \\ y = -\frac{1}{2} g.t^2 + (v_o.\sin\alpha).t' \end{cases}$

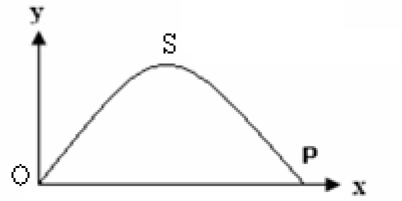
5) Equations de la trajectoire:

L'équation de la trajectoire est obtenue en éliminant t entre x et y.

On a : $\begin{cases} x = (v_o.\cos\alpha).t \\ y = -\frac{1}{2} g.t^2 + (v_o.\sin\alpha).t' \end{cases} \Rightarrow t = \frac{x}{v_o.\cos\alpha}$ en remplaçant dans y : $y = -\frac{g.}{2.v_o{}^2.\cos^2\alpha}.x^2 + x.\tan\alpha$

6) Sommet de la trajectoire:

C'est le plus haut point atteint par le projectile au cours de son mouvement.



Au sommet S de la trajectoire on a : $v_y = 0 \Rightarrow -g.t + v_o.\sin\alpha = 0$ d'où : $t = \frac{v_o.\sin\alpha}{g}$ et en remplaçant dans x et y on obtient les coordonnées du sommet S de la trajectoire du projectile.

$$y_S = \frac{v_o{}^2.\sin^2\alpha}{2g} \quad \text{et} \quad x_S = \frac{v_o{}^2\sin 2\alpha}{2g}$$

avec: $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha.\cos\alpha$

7)La portée:

C'est la distance OP qui sépare le point de lancement et le point de tombée du projectile sur ox.

Au point P on a : $y_P = 0 \Rightarrow -\frac{g}{2v_o{}^2\cos^2\alpha}.x^2 + x.tg\alpha = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_P = 0 & \text{C'est le point de départ du projectile.} \\ \text{ou : } x_P = \frac{v_o^2.\sin 2\alpha}{g} \end{cases}$

$$\text{donc : OP} = \frac{v_o^2.\sin 2\alpha}{g}$$

Remarque: La plus grande portée correspond à $\sin 2\alpha = 1 \Rightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$

SBIRO Abdelkrim