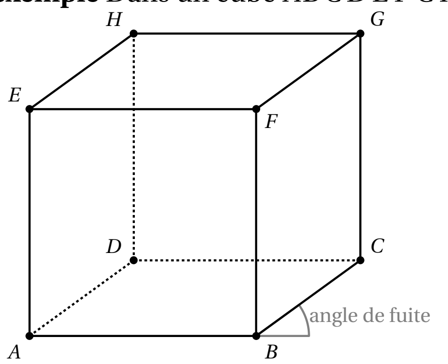
Comprendre la différence entre orthogonal et perpendiculaire

- 2 vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux $\Longleftrightarrow$ ....
- 2 droites $(AB)=\mathscr{D}(A;\overrightarrow{u})$ et $(CD)=\mathscr{D}(C;\overrightarrow{v})$ sont **orthogonales** $\Longleftrightarrow$ ....
- 2 droites sont **perpendiculaires** $\Longleftrightarrow$ elles sont orthogonales et sécantes. **exemple** Dans un cube $ABCDEFGH$



les droites (AB) et (BC) sont perpendiculaires; mais les droites (AB) et (DH) sont orthogonales mais ne sont pas perpendiculaires.
- Une droite $(\mathscr{D})$ est orthogonale à un plan $(\mathscr{P})$ elle est orthogonale à toute droite du plan
  Exemple Dans le cube $ABCDEFGH$ La droite (AE) est orthogonale aux plans $(ABC);(EFG)$

Remarque : Comment montrer qu'une droite est orthogonale à un plan?
Rep : Il suffit de montrer qu'elle est **orthogonale à deux droites sécante de ce plan**, alors elle serait orthogonale à toutes les droites de ce plan. une autre méthode sera dévoilé tout à l'heure.

Expression analytique du produit scalaire.

Dans la suite l'espace $(\mathscr{E})$ serait muni d'un repère orthonormé $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k}\right)$

Si $\overrightarrow{u}(x,y,z)$ et $\overrightarrow{v}(x',y',z')$ alors $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=xx'+yy'+zz'$

Exemple :
$\overrightarrow{u}(-3,5,7)$ et $\overrightarrow{v}(4,13,-9)$ on a alors
$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=(-3)\times4+5\times13+7\times(-9)=-12+65-63=-10$

Conséquences :
Si $A(x_A,y_A,z_A)$; $B(a_B,y_B,z_B)$ et $C(a_C,y_C,z_C)$ alors
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(x_B-x_A)(x_C-x_A)+(y_B-y_A)(y_C-y_A)+(z_B-z_A)(z_C-z_A)$

et $\|\overrightarrow{AB}\|=AB=(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2$

▶ Exercice 0.1

Calculer le produit $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$; $\|\overrightarrow{u}\|$ et $\|\overrightarrow{v}\|$ dans les cas suivants :

1. $\overrightarrow{u}(-1;2;5)$ et $\overrightarrow{v}(3,-4,7)$.
2. $\overrightarrow{u}(3,-2,-7)$ et $\overrightarrow{v}(2,-4,2)$
3. $\overrightarrow{u}(4,2,-9)$ et $\overrightarrow{v}=3\overrightarrow{i}+7\overrightarrow{k}$

▶ Exercice 0.2

Calculer le produit $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ et les distances $AB,AC;BC$ dans les cas suivants :

1. $A(-1,3;5)$; $B(3,-3,1)$ et $C(2,0,3)$.
2. $A(0,2,5)$; $B(1,1,0)$ et $C(-2,4,-3)$.

Théorème (Orthogonalité de deux vecteur)**.**

Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si leurs produit scalaire est nul. c'est-à dire :

$$\overrightarrow{u}\perp\overrightarrow{v}\Longleftrightarrow\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=0$$

▶ Exercice 0.3

Étudier l'orthogonalité des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dans les cas suivants

1) $\overrightarrow{u}(-4,6,3);\overrightarrow{v}(5,7,4)$. **2)** $\overrightarrow{u}(2,7,9);\overrightarrow{v}(-5,4,-2)$

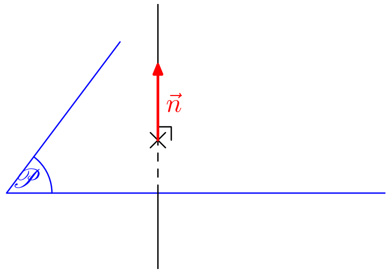
Étudier l'orthogonalité des droites $(\Delta):\begin{cases}x=3-2t\\ y=6+4t;\ t\in\mathbb{R}\\ z=-1+3t\end{cases}$ et (AB) tels que $A\begin{pmatrix}-1\\5\\1\end{pmatrix};B\begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix}$

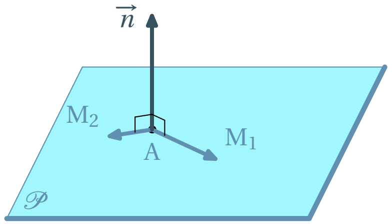
Définition (vecteur normale)**.**

Soit $\mathscr{P}$ un plan et $\mathscr{D}$ une droite orthogonale à $\mathscr{P}$.
On dit qu'un vecteur $\overrightarrow{u}$ est **normal** à $\mathscr{P}$ si $\overrightarrow{u}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$.

Remarque.

Un vecteur $\vec{n}$ est normal à un plan $\mathscr{P}$ s'il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de $\mathscr{P}$.





Exemple :

Dans un cube $ABCDEFGH$; on a le vecteur

1. $\overrightarrow{AB}$ est normale sur les plans (ADH) et (BCG).
2. $\overrightarrow{BF}$ est normale sur les plans ....
3. .... sont normaux sur le plan (ABF).

Proposition.

Soit $\vec{n}$ un vecteur non nul et A un point de l'espace. La plan $\mathscr{P}$ passant par A et normal à $\vec{n}$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$.

Théorème.

— Tout plan $\mathscr{P}$ de vecteur normal $\overrightarrow{n}(a,b,c)$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, admet pour équation cartésienne de la forme :

$$\mathscr{P} : ax + by + cz + d = 0.$$

— Réciproquement, l'ensemble des points $M(x,y,z)$ tels que $ax + by + cz + d = 0$, avec $a \neq 0$, $b \neq 0$ et $c \neq 0$, est un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}(a,b,c)$.

Exemple :

L'équation du plan $\mathscr{P}$ qui passe par $I(-1,5,4)$ et de vecteur normale $\overrightarrow{n}(6,8,-7)$ est
L'ensemble $\mathscr{Q}$ d'équation : $4x - 2y - 3z - 9$ est le plan qui passe par
.... et de vecteur normale ....

Remarque.

— deux plans de l'espace sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs normaux sont colinéaires ;
— deux plans de l'espace sont orthogonaux si et seulement si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.
— Un vecteur normale à un plan, est un vecteur directeur de toute droite lui orthogonale

Exemple :

Étudier la position relative des plans $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{Q})$ dans les cas suivants.

1. $(\mathscr{P}) : 2x - y + 2z - 7 = 0$ et $(\mathscr{Q}) : 2y + z + 13 = 0$
2. $(\mathscr{P}) : 2x + 2y - z - 7 = 0$ et $(\mathscr{Q}) : 6x + 6y - 3z + 103 = 0$

Exercice.

On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation : $5x + y - z + 3 = 0$; la droite $\mathscr{D}$ passant par $A(0,1,3)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(1,0,3)$ et le point $B(5,1,2)$.

1. Montrer que $\mathscr{P}$ et $\mathscr{D}$ ne sont pas parallèles.
2. Déterminer les coordonnées de I leurs point commun.

3. déterminer les coordonnées de H la projection orthogonale de B sur $\mathscr{P}$.
4. Calculer la distance $\mathrm{d}(B;\mathscr{P})$.

....
....
....
....
....
....
....
....

distance d'un point à un plan

Théorème.

Soit $\mathscr{P}$ un plan d'équation cartésienne :

$$\mathscr{P}\ :\ ax+by+cz+d=0$$

et soit $A(x_A, y_A, z_A)$ un point quelconque de l'espace.
La distance du point A au plan $\mathscr{P}$ est :

$$d(\mathrm{A};\mathscr{P})=\frac{|ax_{\mathrm{A}}+by_{\mathrm{A}}+cz_{\mathrm{A}}+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Exemple :

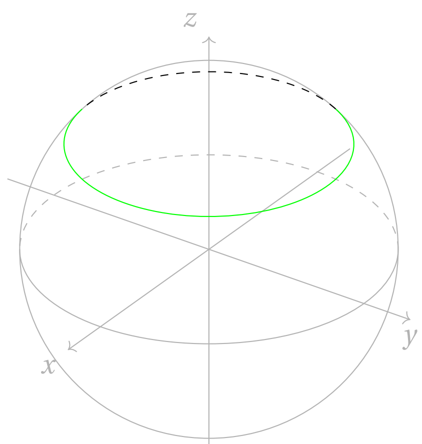
Calculer $d(\mathrm{A};\mathscr{P})$ dans les cas suivants :

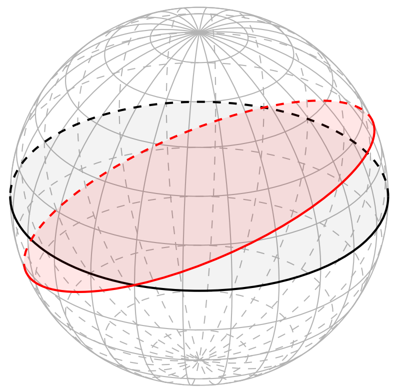
1. $\mathscr{P}\ :\ -2x+y+2z+8=0$ et $A(-2,2,3)$.
2. $\mathscr{P}\ :\ x+y+z-6=0$ et $A(1,-1,3)$.

SPHÈRE

Définition.

Étant donné un point Ω et un réel positif R.
La sphère de centre Ω est de rayon R est l'ensemble de tous les points M de l'espace qui vérifient $\Omega M = R$ on la note par $\mathscr{S}(\Omega, R)$





Équation d'une sphère

Théorème.

Dans un repère orthonormé, la sphère de centre $\Omega(a,b,c)$ et de rayon R est l'ensemble d'équation

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2 \qquad \text{(équation réduite)}$$

$$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+(a^2+b^2+c^2-R^2)=0$$

Exemple :

1. L'équation de la sphère $\mathscr{S}$ de centre $I(-1,2,3)$ et de rayon $R=4$ est :
....

2. L'équation de la sphère $\mathscr{S}$ de centre $J(2,0,-1)$ et qui passe par $A(4,1,0)$ est :
   ....

Théorème.

Étant donné deux points q et B ; La sphère de diamètre $[A,B]$ est l'ensemble de tous les points ? de l'espace qui vérifient

$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=0$$

Elle à pour équation dans un repère orthonormé

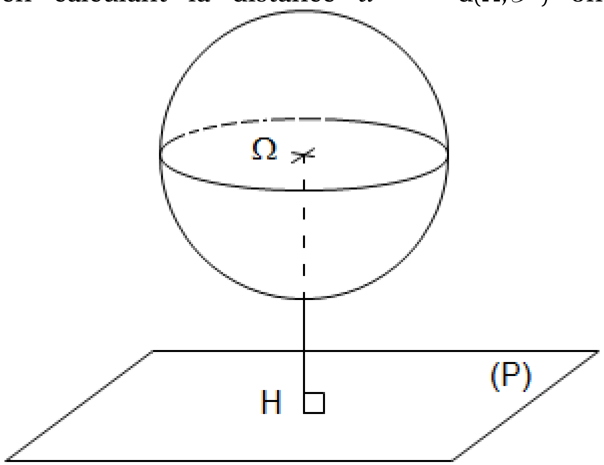
$$(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)+(z-z_A)(z-z_B)=0$$

Exemple :

L'équation de la sphère $\mathscr{S}$ de diamètre $[A,B]$ où $A(-3,2,5)$ et $B(1,-4,-1)$ est :
....

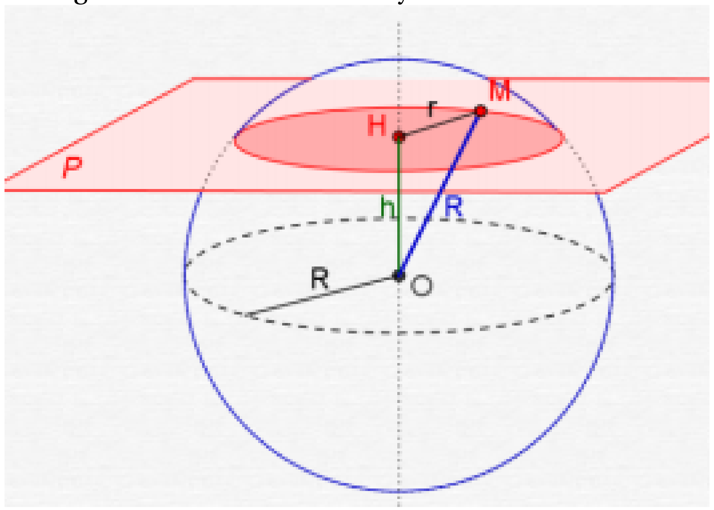
Position relative d'une sphère et d'un plan

Si $\mathscr{S}$ est la sphère de centre $\Omega(a,b,c)$ et de rayon R et $\mathscr{P}$ un plan, en calculant la distance $d = \mathrm{d}(\Omega,\mathscr{P})$ on obtiens l'un des cas suivants :

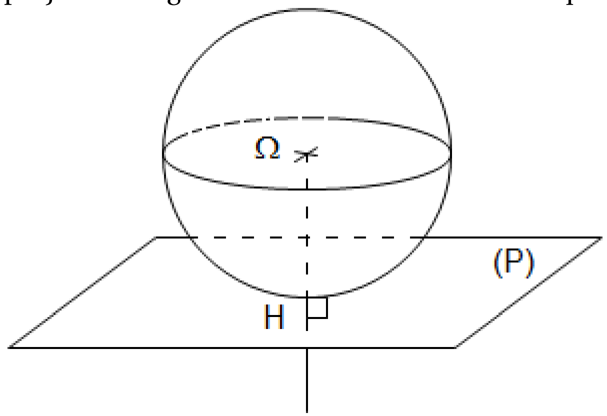


— $d>R$: Le plan $\mathscr{P}$ et la sphère $\mathscr{S}$ n'ont aucun point commun.

— $d<R$; Le plan $\mathscr{P}$ coupe la sphère $\mathscr{S}$ suivant un cercle $\mathscr{C}$ de centre H le projeté orthogonale de Ω sur $\mathscr{P}$ et de rayon $r=\sqrt{R^2-d^2}$.



— $d=R$; Le plan $\mathscr{P}$ et la sphère $\mathscr{S}$ ont un unique point commun qui est H le projeté orthogonale de Ω sur $\mathscr{P}$. on dit alors que $\mathscr{P}$ est tangent à $\mathscr{S}$ en H.



► Exercice 0.4

On considère dans l'espace un cube de 3 cm de côté, noté $ABCDEFGH$ et représenté ci-dessous.

Soit I le barycentre des points pondérés $(E;2)$ et $(F;1)$, J celui de $(F;1)$ et $(B;2)$ et enfin K celui de $(G;2)$ et $(C;1)$.

On veut déterminer l'ensemble des points M équidistants de I, J et K. On note Δ cet ensemble.

1. Placer les points I, J et K sur la figure de **l'annexe qui sera rendue avec la copie.**

2. Soit Ω le point de Δ situé dans le plan (IJK). Que représente ce point pour le triangle IJK?

Pour la suite de l'exercice, on se place maintenant dans le repère orthonormal suivant : $\left(A;\ \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\ ;\ \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\ ;\ \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}\right)$.

3. Donner les coordonnées des points l, J et K.
4. Soit $P(2\ ;\ 0\ ;\ 0)$ et $Q(1\ ;\ 3\ ;\ 3)$ deux points que l'on placera sur la figure. Démontrer que la droite (PQ) est orthogonale au plan (IJK).
5. Soit M un point de l'espace de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$.
   (a) Démontrer que M appartient à Δ si, et seulement si, le triplet $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ est solution d'un système de deux équations linéaires que l'on écrira. Quelle est la nature de Δ?
   (b) Vérifier que P et Q appartiennent à Δ. Tracer Δ sur la figure.
6. (a) Déterminer un vecteur normal au plan (IJK) et en déduire une équation cartésienne de ce plan.
   (b) Déterminer alors les coordonnées exactes de Ω.

► Exercice 0.5

Dans l'espace muni d'un RON $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k}\right)$ on considère l'ensemble $\mathscr{S}$ définit par l'équation $x^2+y^2+z^2-4y+2z+2=0$.

1. Montrer que $\mathscr{S}$ est une sphère de centre $\Omega(0,2,-1)$ et de centre $R=\sqrt{3}$.
2. (a) Vérifier que le point $A(-1,1,0)$ appartient à $\mathscr{S}$.
   (b) Déterminer l'équation du plan $\mathscr{P}$ tangent à $\mathscr{S}$ en A.
3. (a) Déterminer l'équation du plan $\mathscr{Q}$ qui passe par le point $B(1,3,-2)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}(1,1,1)$.
   (b) Montrer que le plan $\mathscr{Q}$ coupe la sphère $\mathscr{S}$ suivant un cercle $\mathscr{C}$.
   (c) Déterminer le centre et le rayon du cercle $\mathscr{C}$.