## Exercice 1 : (3 points) — Nombres complexes

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2+\sqrt{2}z+2=0$.
2. On pose $u=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-i\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ :
   (a) Écrire $u$ sous sa forme trigonométrique.
   (b) Déduire la nature de $u^6$.
3. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les points $A;B$ et $I$ d'affixes $a=4-i4\sqrt{3}$ , $b=8$ et $u$ respectivement. et $r$ la rotation de centre $O$ et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.
   (a) Donner l'expression complexe de $r$.
   (b) Vérifier que le point $B$ est l'image du point $A$ par la rotation $r$ .
   (c) En déduire la nature du triangle $OAB$ .
   (d) Monter que les points $O,A,I$ sont alignés, et déterminer l'expression complexe de l'homothétie $h$ de centre $A$ qui transforme $I$ en $O$.

## Exercice : 3. ( 10.5 points) — Étude d'une fonction

**Partie 1** Soit $f$ la fonction définie par : $f(x)=\ln(\mathrm{e}^{2x}-2\mathrm{e}^x+2)$.

1. Développer $(\mathrm{e}^x-1)^2+1$ puis déduire que $\mathscr{D}_f=\mathbb{R}$.
2. (a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ .
   (b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, et donner une interprétation graphique du résultat.
3. (a) Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}$ ; $f(x)=2x+\ln(1-\dfrac{2}{\mathrm{e}^x}+\dfrac{2}{\mathrm{e}^{2x}})$.
   (b) Montrer que la droite d'équation $y=2x$ est une asymptote à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.
4. Montrer que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer que $\forall x\in\mathbb{R}$ ; $f'(x)=\dfrac{2\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x-1)}{(\mathrm{e}^x-1)^2+1}$.
5. Montrer que $f'(x)$ à le même signe que $(\mathrm{e}^x-1)$ sur $\mathbb{R}$ et en déduire les variations de $f$.
6. Dresser le tableau de variation de $f$.
7. (a) Vérifier que pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a : $(\mathrm{e}^x-1)(\mathrm{e}^x-2)=\mathrm{e}^{2x}-3\mathrm{e}^x+2$.
   (b) Étudier le signe de $\mathrm{e}^{2x}-3\mathrm{e}^x+2$ sur $\mathbb{R}$ .
   (c) Déduire que $\forall x\in[0,\ln 2]$ ; $\mathrm{e}^{2x}-2\mathrm{e}^x+2\leqslant \mathrm{e}^x$ et que $f(x)\leqslant x$ sur $[0,\ln 2]$
8. Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ (on admet qu'on a deux points d'inflexions l'une ayant un abscisse inférieur à $-1$ et l'autre d'abscisse plus grand que 2 ).

**Partie 2** Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par $u_0=0.5$ et $\forall n\geqslant 0; u_{n+1}=f(u_n)$.

1. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$ ; $0<u_n\leqslant \ln 2$.
2. Montrer que $(u_n)$ est décroissante.
3. Déduire que $(u_n)$ est convergente et déterminer sa limite.

## Exercice 1 : (2 points) — Intégrales

On pose $I=\displaystyle\int_{-2}^{-1}\frac{x}{x+3}\,\mathrm{d}x$ et $J=\displaystyle\int_{-2}^{-1}\ln(2x+6)\,\mathrm{d}x$

1. (a) Vérifier que $\dfrac{x}{x+3}=1-\dfrac{3}{x+3}$.
   (b) Calculer la valeur de l'intégrale $I$.
2. En utilisant une intégration par partie , montrer que $J=-I$

## Exercice 1 : (3 points) — Géométrie

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ on considère les points $A(-6,2,0)$; $B(-2,-6,8)$; $C(1,2,2)$ et $D(4,-2,3)$ et $(\mathcal{S})$ l'ensemble des point $M$ de l'espace qui vérifient $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=0$

1. (a) Calculer le produit vectoriel $\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OD}$ et déduire que les points $O;C$ et $D$ ne sont pas alignés et calculer la surface du triangle $OCD$.
   (b) Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ qui passe par les points $O;C;D$.
2. Montrer que $(\mathcal{S})$ est une sphère dont on déterminera les coordonnées de son centre $\Omega$ et le rayon $R$.
3. (a) Calculer la distance de $\Omega$ au plan $\mathcal{P}$ .
   (b) Déduire que $\mathcal{P}$ est tangent à $(\mathcal{S})$.
   (c) Calculer $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ et déduire que $\mathcal{P}$ est tangent à $(\mathcal{S})$ en $O$
4. Calculer le volume du pyramide de sommet $\Omega$ et de base le triangle $OCD$