1. REPÈRE DIRECTE

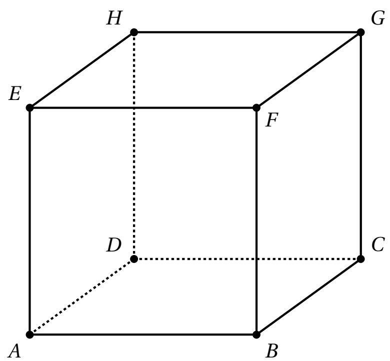
Définition.

Dans l'espace un repère $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k}\right)$ est de sens direct si le « bonhomme dampère » placé sur laxe $(0z)$, les pieds en 0, la tête du côté des z positifs et regardant les graduations positives de laxe (Ox), a les graduations positives de laxe (Oy) sur sa gauche. Dans le cas contraire, le repère est dit indirect ou rétrograde

Remarque.

Dans un repère direct vérifie la **règle de la main droite :** On pose la main droite en O lindex indique le sens de $\overrightarrow{i}$, la paume de (le majeur) indique le sens de $\overrightarrow{j}$ et le pouce indique le sens de $\overrightarrow{k}$.
Un repère directe vérifie aussi la **règle du tir-bouchon** ou du tourne-visse : on positionne celui-ci en O et on le fait tourner dans le sens qui amène $\overrightarrow{i}$ sur $\overrightarrow{j}$, le vecteur $\overrightarrow{k}$ indique alors le sens de mouvement du visse ou du tir-bouchon.

Exemple :



Soit $ABCDEFGH$ un cube. les repères suivants sont :

1) $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$ est directe . **2)** $\left(C;\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CG}\right)$ est ....

3) $\left(F;\overrightarrow{FE},\overrightarrow{FH},\overrightarrow{FB}\right)$ est .... **4)** $\left(G;\overrightarrow{GF},\overrightarrow{GE},\overrightarrow{GC}\right)$ est ....

Remarque.

Si $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$est un repère directe alors :

1) $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{k},\overrightarrow{j}\right)$ est indirecte. **2)** $\left(O;\overrightarrow{j},\overrightarrow{k},\overrightarrow{i}\right)$ est directe.

3) $\left(O;-\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k}\right)$ est indirecte. **4)** $\left(O;-\overrightarrow{i},\overrightarrow{k},\overrightarrow{j}\right)$ est ....

5) $\left(O;-3\overrightarrow{j},2\overrightarrow{i},-\overrightarrow{k}\right)$ est .... **6)** $\left(O;-4\overrightarrow{j},3\overrightarrow{i},-2\overrightarrow{k}\right)$ est ....

Définition.

Un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$est dit
- ➤ **normé** si l'on a : $\|\overrightarrow{i}\|=\|\overrightarrow{j}\|=\|\overrightarrow{k}\|=1$.
- ➤ **Orthogonale** si l'on a $\overrightarrow{i}\cdot\overrightarrow{j}=\overrightarrow{i}\cdot\overrightarrow{k}=\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{j}=0$.
- ➤ **Orthonormé** s'il est à la fois normé et orthogonale.
- ➤ **Orthonormé directe** s'il est à la fois directe et orthonormé.

2. PRODUIT VECTORIEL

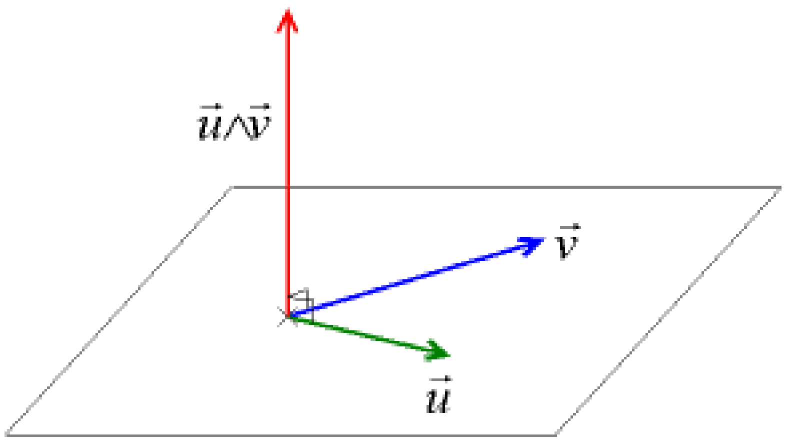
Dans l'espace on va définir un produit de deux vecteur qui va donner un vecteur (le produit scalaire de deux vecteurs donnait un nombre) !

Donc ce nouveau vecteur sera définie par sa direction, son sens et sa norme.

Définition.

Soit $\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}$ deux vecteurs et A,B,C des points tels que $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{v}$.
Le produit vectoriel de $\overrightarrow{u}$ et vvv noté $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}$ est le vecteur défini par :

1. si A,B,C sont alignés alors on pose $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}$
2. Si A,B,C ne sont pas alignés, alors $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}=\overrightarrow{w}=\overrightarrow{AD}$ où le point D est défini par :
   - La droite (AD) est orthogonale au plan (ABC)
   - Le repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)$ est directe.
   - $AD=\|\overrightarrow{w}\|=AB\cdot AC\sin B\widehat{A}C$



Théorème.

Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v};\overrightarrow{w}$ et pour tout réel $k\in\mathbb{R}$, on a :

1. **Antisymétrie** : $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}=-\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{u}$
2. $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}$ si et seulement si $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}$ ou bien $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.
3. **Distributivité par rapport à laddition** : $\left(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right)\wedge\overrightarrow{w}=\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{w}+\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{w}$
4. **Compatibilité avec la multiplication par un scalaire** :

$$k\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}=\overrightarrow{u}\wedge k\overrightarrow{v}=k\left(\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}\right)$$

Exemple :

Soit $ABCDEFGH$ un cube d'arrête 1, tel que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)$ soit une base directe.

- $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{GH}=\overrightarrow{0}$ car les vecteurs $\overrightarrow{AB};\overrightarrow{GH}$ sont colinéaires.
- $\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BH}=$........ car ....
- Trouver 3 autres produit vectoriels nuls et 3 autres non nuls.

3 . EXPRESSION ANALYTIQUE DU PRODUIT VECTORIEL

Dans la suite l'espace est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.
On a les résultats suivants

Théorème.

1) $\overrightarrow{i}\wedge\overrightarrow{j}=\overrightarrow{k}$	**2)** $\overrightarrow{j}\wedge\overrightarrow{k}=\overrightarrow{i}$	**3)** $\overrightarrow{k}\wedge\overrightarrow{i}=\overrightarrow{j}$
4) $\overrightarrow{i}\wedge\overrightarrow{k}=-\overrightarrow{j}$	**5)** $\overrightarrow{j}\wedge\overrightarrow{i}=-\overrightarrow{k}$	**6)** $\overrightarrow{k}\wedge\overrightarrow{j}=-\overrightarrow{i}$

Application

on pose $\overrightarrow{u}=3\overrightarrow{i}+2\overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{v}=-2\overrightarrow{i}+4\overrightarrow{j}$ alors,
$\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}=$..

Théorème.

Soit $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{v} = x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j} + z'\overrightarrow{k}$ c'est-à-dire $\overrightarrow{u}(x, y, z)$ et $\overrightarrow{u}(x', y', z')$ alors :

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = X\overrightarrow{i} + Y\overrightarrow{j} + Z\overrightarrow{k}$$

où $X = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}$; $Y = -\begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix}$ et $Z = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$

Exemple :

$\overrightarrow{u}(2, -3, 4)$ et $\overrightarrow{v}(3, 5, -7)$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} &= \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 4 & -7 \end{vmatrix}\overrightarrow{i} - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -7 \end{vmatrix}\overrightarrow{j} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}\overrightarrow{k} \\ &= 1\overrightarrow{i} + 26\overrightarrow{j} + 19\overrightarrow{k} \end{aligned}$$

Méthode.

Pour calculer $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ on procède comme suit : On écrit (au brouillon) $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}$ Première étape calcule de X

On barre la première ligne comme suit $\begin{vmatrix} \cancel{x} & \cancel{x'} \\ y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}$ puis on rapporte le déterminant restant $X = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}$ deuxième étape : Calcule de Y On ajoute une ligne dans le déterminant précédent et on barre la deuxième ligne et on rapporte le déterminant restant comme suit : $\begin{vmatrix} \cancel{x} & \cancel{x'} \\ y & y' \\ z & z' \\ x & x' \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{On barre une ligne et on rapporte}} \begin{vmatrix} \cancel{x} & \cancel{x'} \\ \cancel{y} & \cancel{y'} \\ z & z' \\ x & x' \end{vmatrix}$ on a $Y = \begin{vmatrix} z & z' \\ x & x' \end{vmatrix}$ on poursuit de la même manière « Ajouter une ligne , barrer une ligne et rapporter le reste ». $\begin{vmatrix} \cancel{x} & \cancel{x'} \\ \cancel{y} & \cancel{y'} \\ z & z' \\ x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{On barre une ligne et on rapporte}} \begin{vmatrix} \cancel{x} & \cancel{x'} \\ \cancel{y} & \cancel{y'} \\ \cancel{z} & \cancel{z'} \\ x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$ d'ou $Z = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$

finalement $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = X\overrightarrow{i} + Y\overrightarrow{j} + Z\overrightarrow{k}$

Exemple :

Mettre en exécution la méthode précédente pour calculer $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ dans les cas suivants :

1. $\overrightarrow{u}(3, -1, 2)$ et $\overrightarrow{v}(0, 1, 2)$
2. $\overrightarrow{u}(-1, -4, 0)$ et $\overrightarrow{v}(5, -2, 3)$

4. APPLICATIONS DU PRODUIT VECTORIEL

4.1. alignement et parallélisme

Théorème.

Étant donné quatre points A, B, C et D deux à deux distincts.

- A, B, C sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{0}$.
- Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{0}$.

Trois points

Exemple :

Étudier l'alignement des points $A(-1, 2, 1)$; $B(2, 1, 0)$ et $D(-10, 5, 4)$.

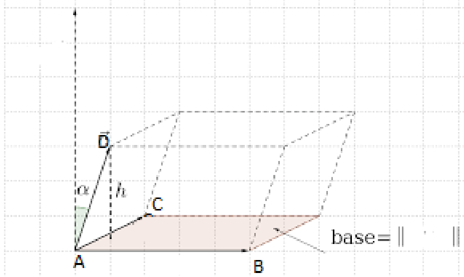
....
....
....
....
....

Remarque.

Les points A, B et C définissent un plan si et seulement si $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \overrightarrow{0}$.

4.2. Calcule de surface et de volume

On se donne quatre points A, B, C et D non coplanaires



Théorème.

- La surface du parallélogramme de cotés $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est $S = \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$ et par suite
- La surface du triangle ABC est $S_{ABC} = \frac{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|}{2}$.
- Le volume du parallélépipède construit sur les vecteur $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ est

$$V = S \cdot h = \left|\overrightarrow{AD} \cdot \left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right)\right|$$

- Le volume du tétraèdre $ABCD$ est

$$\mathbb{V}_{ABCD} = \frac{V}{6} = \frac{\left|\overrightarrow{AD} \cdot \left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right)\right|}{6}$$

Exemple :

$A(-1, 0, 0)$; $B(0, 2, 0)$; $C(0, 13)$ et $D(4, -1, 2)$

Calculer la surface du triangle ABC. ....
....
....
....
....

Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$ ....
....
....
....

....

4.3 . Calcul de la distance d'un point à une droite

Étant donné une droite $\mathscr{D}$ qui passe par un point A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$; et M un point quelconque de l'espace on

$$d(M;\mathscr{D}) = \frac{||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM}||}{||\overrightarrow{AB}||}$$

Exemple :

$A(-1,0,0)$; $B(0,2,0)$; $C(0,1,3)$
calculer la distance du point C à la droite (AB).
....
....
....
....
....

Déterminer une équation du plan (ABC). ....
....
....
....
....