Niveaux: SM PC SVT	Matière: Physique
PROF :Zakaryae Chriki	Résumé N:11

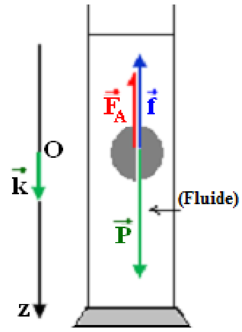
Chute verticale d'un corps solide

I. CHUTE VERTICALE AVEC FROTTEMENT

1. Rappel

Le mobile est soumis à trois forces

- Poids : $\vec{P} = m.\vec{g} = m.g.\vec{k}$
- Poussée d'Archimède : $\vec{F}_A = -m_f.g.\vec{k}$ avec m_f : masse du fluide déplacé
- Forces de frottements fluide : $\vec{f} = -k.v_G^n.\vec{k}$ avec k est une constante



Caractéristiques des forces :

	Direction :	Sens :	Intensité :	Composante sur Oz
$\vec{P}$	La verticale (parallèle à l'axe Oz)	Vers le bas	$P = m.g$	$P_z = m.g$
$\vec{F}_A$		Vers le haut	$F_A = m_f.g$	$F_{Az} = - m_f.g$
$\vec{f}$		Vers le haut	$f = k.V^n$	$f_z = - k.V^n$

2. Equation différentielle vérifiée par la vitesse:

On applique alors la deuxième loi de Newton : $\sum \vec{F} = m.\vec{a}_G$

$$\vec{P} + \vec{F}_A + \vec{f} = m.\vec{a}_G$$

En projetant la relation vectorielle sur l'axe vertical Oz dirigé vers le bas :

$$P_z + F_{Az} + f_z = m.a_z \quad \text{et} \quad P - F_A - f = m.a_z \quad \text{d'où} \quad m.g - m_f.g - k.V^n = m.a_z$$

On obtient alors l'expression : $m\,g - m_f.g - k.v^n = m\frac{dv}{dt}$

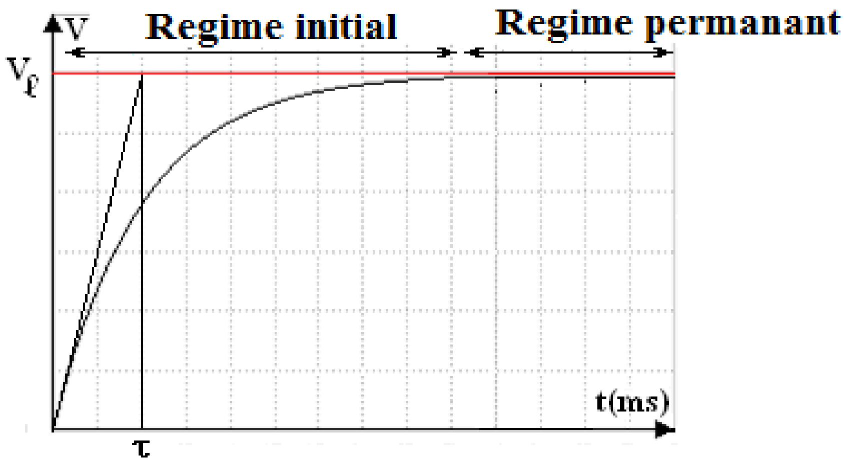
$$g.(m - m_f) - k.v^n = m\frac{dv}{dt} \quad \text{et par suite} \quad \frac{dv}{dt} = g.\frac{m - m_f}{m} - \frac{k}{m}.v^n \text{ : Equation différentielle}$$

L'équation différentielle s'écrit sous la forme $\frac{dv}{dt} = B - A.v^n$ avec $A = g.\frac{m - m_f}{m} = g.(1 - \frac{m_f}{m})$ et $B = \frac{k}{m}$

Remarque :

On considère une sphère de masse volumique ρ, de volume V ($m = \rho.V$) en mouvement dans un fluide de masse volumique ρ_0 ($m_f = \rho_0.V$)

$$A = g.\frac{m - m_f}{m} = g.\left(1 - \frac{m_f}{m}\right) = g\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right)$$



Au cours d'une chute verticale avec frottement, le mouvement du centre d'inertie G du solide peut se décomposer en deux phase :

- Le régime initial ou transitoire, pendant lequel :
  - La vitesse v_G augmente.
  - La valeur f de la force de frottement fluide augmente
  - L'accélération a_G diminue.
- Le régime asymptotique ou permanent, pendant lequel
  - La vitesse v_G est égale à une vitesse constante v_ℓ.
  - La valeur f de la force de frottement fluide est constante
  - L'accélération a_G est nulle.

$$\frac{dv}{dt} = A - B.v_G^n$$

Le régime initial	**Le régime permanent**	**Graphiquement**
$v_G = 0$ et $\frac{dv}{dt} = A - B.v_G^n = A$	La vitesse $v_G = v_\ell = C^{te}$. $\frac{dv}{dt} = A - B.v_\ell^n = 0$ d'où $A = B.v_\ell^n$ et $v_\ell^n = \frac{A}{B}$ et $v_\ell = \sqrt[n]{\frac{A}{B}}$	A $t = \tau$, La tangente à la courbe v(t) à t=0 et l' asymptote v= v_ℓ se croisent donc $V_\ell = a_0.\tau$ a_0 : le coefficient directeur de la tangente à la courbe v(t) à l'instant t=0 alors $a_0 = A$

3. La solution de l'equation differentielle par la éthode D'EULER

La méthode d'Euler est une méthode numérique **itérative** qui permet d'évaluer, à intervalles de temps réguliers, différentes valeurs approchées à partir des conditions initiales.

Il faut pour cela connaître :

- L'équation différentielle du mouvement $\frac{dv}{dt} = A - B.v_G^n$.
- Les conditions initiales v_0.
- Le pas de résolution Δt ; $\Delta t = t_{i+1} - t_i$.

On peut déterminer les grandeurs cinétiques (vitesses et accélérations) par :

- ✓ L'équation différentielle à l'instant t_i : $a_i = \frac{dv}{dt} = A - B.v_i^n$ (pour le même point : connaitre la vitesse d'un point c'est déterminer son accélération et réciproquement).
- ✓ L'expression de la vitesse : $V_{i+1} = V_i + a_i\,\Delta t$ (d'un point M_i vers un autre M_{i+1} : Connaitre la vitesse et l'accélération d'un point M_i on peut déterminer la vitesse du point suivant M_{i+1}).

$t_0 = 0$ $\quad$ $V_0 = 0$ $\longrightarrow$ $a_0 = A - B.(V_0)^n = A$

$t_1 = t_0 + \Delta t$ $\quad$ $V_1 = V_0 + a_0\,\Delta t$ $\longrightarrow$ $a_1 = A - B.(V_1)^n$

$t_2 = t_1 + \Delta t$ $\quad$ $V_2 = V_1 + a_1\,\Delta t$ $\longrightarrow$ $a_2 = A - B.(V_2)^n$

II. La chute libre d'un corps solide

- Le projectile est soumis à l'unique action de son poids $\vec{P} = m.\vec{g}$
- Les deux vecteurs $\vec{P}$ et $\vec{g}$ ont le même sens et la même direction (les deux vecteurs sont colinéaires)
- La 2eme loi de newton $\sum \vec{F} = m.\vec{a}_G$ d'où $\vec{P} = m.\vec{g} = m.\vec{a}_G$ donc $\vec{a}_G = \vec{g}$
- Les deux vecteurs $\vec{a}_G$ et $\vec{g}$ ont les mêmes caractéristiques

1. Caractéristique du vecteur accélération $\vec{a}_G$

Origine : Le point G

Direction :
- La droite verticale
- La même direction que $\vec{g}$ (même direction que le poids $\vec{P}$)

Sens :
- Vers le bas
- Le même sens que $\vec{g}$ (même sens que le poids $\vec{P}$)

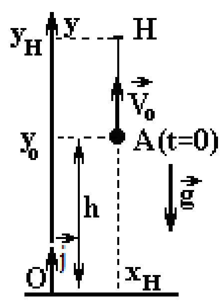
Intensité : $a_G = g$

2. Coordonnées de $\vec{a}_G$ vecteur accélération :

$a_y = -g = C^{te}$

A l'instant t= 0

$y_0 = h$ et $V_{0y} = V_0$



3. Nature du mouvement sur l'axe Oy

$a_y = -g = C^{te}$: Le mouvement est rectiligne uniformément varié sur l'axe Oy

$$y = -\frac{1}{2}.g.t^2 + V_0.t + y_0$$
$$V_y = -g.t + V_0$$

$y \leftarrow t \rightarrow V_y$

4. La flèche :

La flèche est l'altitude H la plus élevée atteinte par le projectile

- Au point H la composante de la vitesse est nulle $V_{Hy}=0$

$V_y = - g.t_H + V_0 = 0$ d'où $t_H = \frac{V_0}{g}$: l'instant d'arrivée au point H et o remplace dans y(t)

$$y_H = -\frac{1}{2}.g.\left(\frac{V_0}{g}\right)^2 + V_0.\frac{V_0}{g} + y_0 = \frac{1}{2}.\frac{V_0^2}{g} + y_0$$

y_H: Ordonnée du point H d'où $AH = y_H - y_0 = \frac{1}{2}.\frac{V_0^2}{g}$

⁂ Exploiter les équations horaires avec une ou plusieurs informations

Au point A	• $y(A)=h$ • L'instant de passage par le point A est $t_A = 2.t_H = \frac{2.V_0}{g}$ • La vitesse de passage par le point A est V_0
Au point O	• $y(O) = 0$

EXERCICE 1

Pour ne pas détruire les matières alimentaires quand elles arrivent au sol, la caisse est attachée à un parachute afin de ralentir sa chute. L'hélicoptère reste immobile à la même hauteur H qu'auparavant au point O. La caisse tombe avec son parachute verticalement sans vitesse initiale à l'instant $t_0=0$.

Les forces de frottements avec l'air sont données par la relation $\vec{f} = - 100.\vec{v}$, avec $\vec{v}$ le vecteur vitesse de la caisse à l'instant t.

On néglige la poussée d'Archimède pendant la chute.

On donne la masse du système {La caisse et le parachute} : m=150 kg

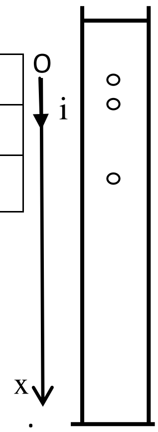
2.1. Trouver l'équation différentielle dans le repère R(O, $\vec{i}$, que vérifie la vitesse de G_1 le centre d'inertie du système.

2.2. La courbe de la *figure 2* représente la variation de la vitesse de G_1 en fonction du temps; préciser la vitesse limite V_{lim} et le temps caractéristique τ de la chute.

2.3. Donner une valeur approximative de la durée du régime transitoire.

2.4. En se basant sur la méthode d'Olère et le tableau suivant, préciser la valeur de la vitesse v_4 et celle de l'accélération a_4.

$t_i(s)$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
$v_i(m.s^{-1})$	0	1,00	1,93	2,80	v_4	4,37	5,08
$a_i(m.s^{-2})$	10,00	9,33	8,71	8,12	a_4	7,07	6,60



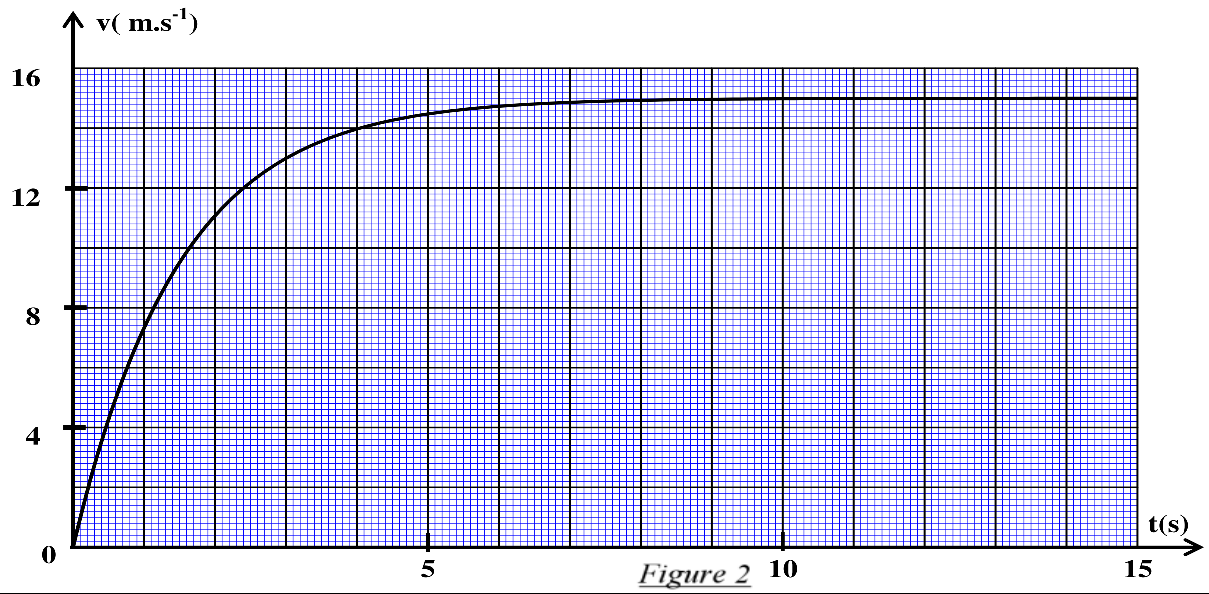


Figure 2

EXERCICE 2

L'objectif de cet exercice est d'étudier le mouvement de chute verticale d'une bille métallique dans l'air et dans un liquide visqueux.

Donnée :

- La masse volumique de la bille : $\rho_1 = 2,70.10^3$ kg.m^{-3} ;
- La masse volumique du liquide visqueux : $\rho_2 = 1,26.10^3$ kg.m^{-3} ;
- Le volume de la bille : $V = 4,20.10^{-6}$ m^3
- Accélération de la pesanteur : $g = 9,80$ m.s^{-2}

A l'instant t=0 on libère la bille d'un point O confondu avec son centre d'inertieG .

Le point O se trouve à une hauteur H de la surface libre du liquide visqueux qui se trouve dans un tube transparent vertical (figure 1).

La courbe de la figure (2) représente l'évolution de la vitesse v du centre d'inertie G de la bille au cours de sa chute dans l'air et dans le liquide visqueux.

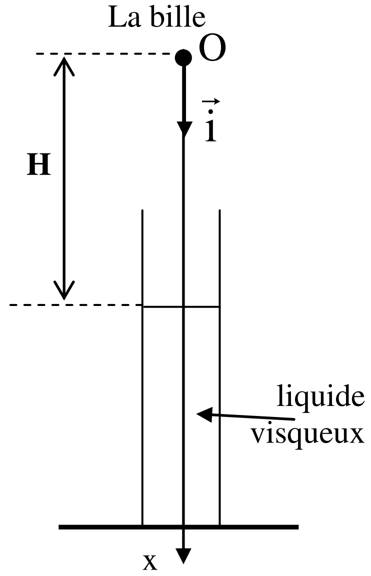


Figure 1

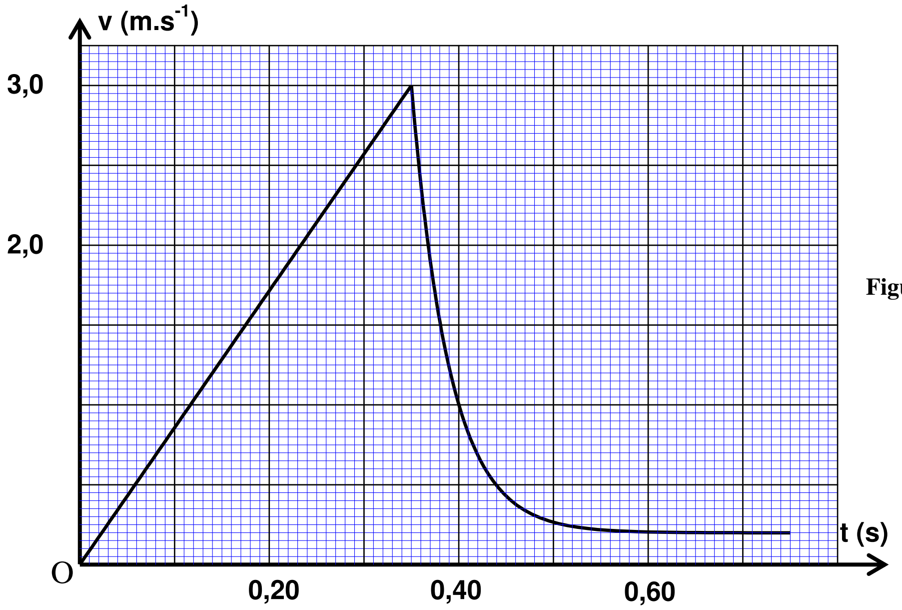


Figure2

1- Etude du mouvement de la bille dans l'air.

On modélise l'action de l'air sur la bille au cours de sa chute par une force verticale $\vec{R}$ d'intensité R constante .

On néglige le rayon de la bille devant la hauteur H .

Le centre d'inertie de la bille atteint la surface libre du liquide visqueux à un instant t_1 avec une vitesse v_1 .

1.1- En appliquant la deuxième loi de Newton , exprimer R en fonction de V ,ρ_1 , g , v_1 et t_1 .

1.2- En exploitant la courbe v=f(t) , calculer la valeur de R .

2- Etude du mouvement de la bille dans le liquide visqueux .

La bille est soumise pendant sa chute dans le liquide visqueux , en plus de son poids aux forces :

- Poussée d'Archimède : $\vec{F} = -\rho_2.V.g.\vec{i}$
- Force de frottement visqueux : $\vec{f} = -k.v.\vec{i}$ avec k constante positive .

On modélise l'évolution de la vitesse v du centre d'inertie de la bille, dans le système international des unités, par l'équation différentielle $\frac{dv}{dt} = 5,2 - 26.v$ (1)

2.1- Trouver l'équation différentielle littérale vérifiée par la vitesse v du centre d'inertie de la bille en fonction des données du texte.

2.2- En utilisant cette équation différentielle littérale et le graphe de la figure 2 ,vérifier que l'équation différentielle (1) est correcte.

2.3- En utilisant l'équation aux dimensions, déterminer la dimension de la constante k.

Calculer la valeur de k

2.4- sachant que la vitesse du centre d'inertie de la bille dans le liquide visqueux à un instant t_i est $v_i = 2,38$ m.s^{-1} ; établir à l'aide de la méthode d'Euler que l'expression de la vitesse de G à l'instant $t_{i+1} = t_i + \Delta t$ est : $v_{i+1} = (1 - 26\Delta t).v_i + 5,20\Delta t$ avec Δt le pas du calcul .

Calculer v_{i+1} dans le cas où $\Delta t = 5,00$ ms.

EXERCICE 3

Ahmed et Myriam ont décidé de vérifier expérimentalement la déduction de Newton, pour cela ils ont utilisé deux billes en verre (a) et (b) ayant le même volume V et la même masse m.

Ils abandonnent les deux billes au même instant $t = 0$ et sans vitesse initiale d'une même hauteur h du sol (fig 1) **.**

- Ahmed a lâché la bille (a) dans l'air ;
- Myriam a lâché la bille (b) dans un tube transparent contenant de l'eau de hauteur h (fig 1).

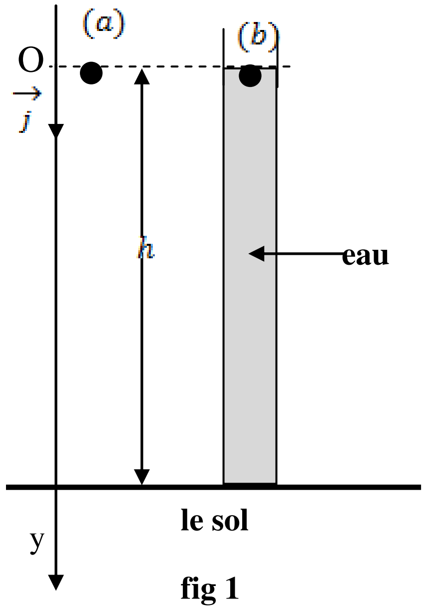


fig 1

A l'aide d'un dispositif convenable Ahmed et Myriam ont obtenu les résultats suivants :

- La bille (a) atteint le sol à l'instant $t_a = 0,41s$;
- La bille (b) atteint le sol à l'instant $t_b = 1,1\,s$.

Données : accélération de la pesanteur $g = 9,80 m.s^{-2}$;

$m = 6,0.10^{-3} kg$; $V = 2,57.10^{-6} m^3$;

la masse volumique de l'eau $\rho = 1000 kg.m^{-3}$.

On suppose que la bille (a) n'est soumise au cours de sa chute dans l'air qu' à son poids.

La bille (b) est soumise au cours de sa chute dans l'eau à :

- Son poids d'intensité $P = mg$; - La poussé d'Archimède d'intensité $F_A = \rho.g.V$;

- La force de frottement fluide d'intensité $f = K.v^2$ avec K une constante positive et v vitesse du centre d'inertie de la bille .

1- Étude du mouvement de la bille (a) dans l'air

1.1- Établir l'équation différentielle que vitrifie la vitesse du centre d'inertie de la bille (a) au cours de la chute**.**

1.2- Calculer la valeur de la hauteur **h** .

2- Étude du mouvement de la bille (b) dans l'eau

Myriam a enregistré à l'aide d'un dispositif convenable L'évolution de la vitesse de la bille (b) au cours du temps ; Elle a obtenu le graphe représenté dans la figure 2.

2.1-Établir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse du centre d'inertie de la bille (b) au cours de sa chute dans l'eau en fonction des donnés du texte.

2.2- A l'aide du graphe de la figure 2,déterminer la valeur de la constant K.

2.3- Trouver l'expression de l'accélération a_0 du centre d'inertie de la bille (b) à l'instant t = 0 en fonction de g , V , ρ et m . Déterminer le temps caractéristique du mouvement de la bille (b) .

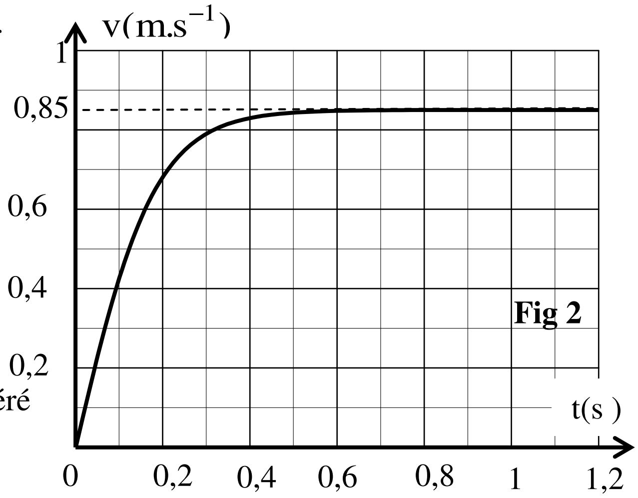


Fig 2

3- la différence entre les durées de chute

Ahmed et Myriam ont répété leur expérience dans les Conditions précédentes mais cette fois la hauteur D'eau dans le tube est H = 2h .Ahmed et Myriam ont libéré des deux billes (a) et (b) sans vitesse initiale au même instant $t = 0$ du même hauteur H = 2h.

a- Exprimer Δt qui sépare l'arrivé des deux billes (a) et (b) au sol en fonction de t_a, t_b, g, h et v_ℓ.

b- Calculer la valeur de Δt

EXERCICE 4

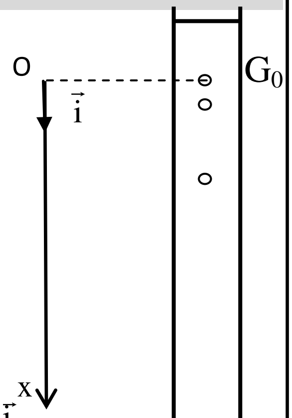


Fig1

On étudie le mouvement d'une bille en acier dans un fluide visqueux contenu dans une éprouvette graduée (fig1).
La figure (1) donne une idée sur le montage utilisé sans tenir compte de l'échelle.
On libère la bille sans vitesse initiale à un instant t = 0 et au même instant commence la saisie des images par un webcam reliée à un ordinateur. La position instantanée du centre d'inertie G est repérée sur un axe vertical Ox orienté vers le bas et de vecteur unitaire $\vec{i}$;fig (1). A t=0 , le centre d'inertie G est au point G_0 d'abscisse x=0.
On représente à chaque instant le vecteur vitesse du centre d'inertie de la bille par $\vec{v} = v.\vec{i}$.
L'analyse de la vidéo obtenue à l'aide d'un logiciel approprié permet de calculer à chaque instant t la vitesse v du centre d'inertie de la bille .La courbe de la figure 2 représente l'évolution de v au cours du temps.

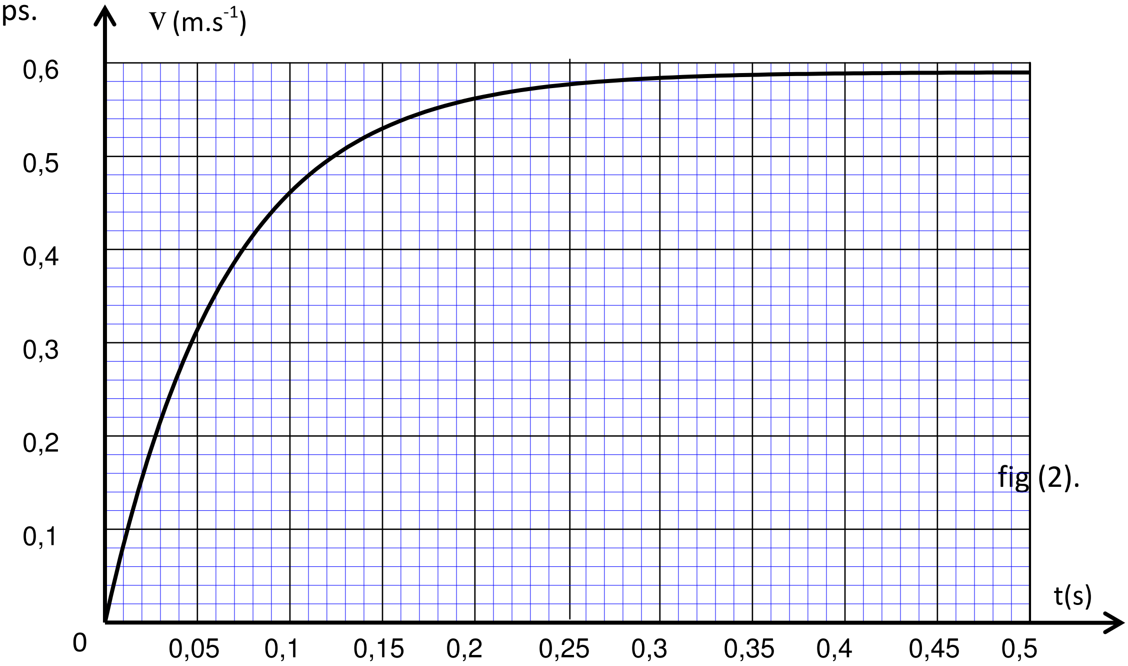


fig (2).

On représente par V et **m** respectivement le volume et la masse de la bille et par ρ_a et ρ_s respectivement la masse volumique de la bille et celle de du liquide visqueux et par g l'intensité de pesanteur . Au cours de sa chute , la bille est soumise à :

-La force de frottement fluide : $f = -h.v.\vec{i}$; h est le coefficient de frottement visqueux.

-La poussée d'Archimède : $\vec{F} = -\rho_s.V.\vec{g}$; -Son poids : $m\vec{g} = -\rho_a.V.\vec{g}$.

1- Al 'aide de la courbe de la figure (2) , montrer l'existence d'une vitesse limite et déterminer sa valeur expérimentale .

2- Représenter , sur un schéma sans échelle ,les vecteurs forces appliqués sur la bille en mouvement dans le fluide.

3- Etablir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse v(t) et montrer qu'elle, s'écrit sous la forme $\frac{dv}{dt} = -\frac{h}{m}.v + \alpha.g$ en précisant l'expression de α .

4- Vérifier que la fonction $v(t) = \alpha.g.\frac{m}{h}\left[1 - e^{-\frac{h}{m}}\right]$ est solution de cette équation différentielle.

5- Montrer ,à partir de l'équation différentielle ou à partir de sa solution l'existence d'un e vitesse limite et calculer sa valeur et la comparer avec la valeur trouvée expérimentalement .

On donne : $m = 5,0g$; $g = 9,81 m.s^{-2}$; $h = 7,60.10^{-2} kg.s^{-1}$; $\alpha = 0,92$.

6-Déterminer à l'aide de l'analyse dimensionnelle l'unité de $\frac{m}{h}$ et déterminer sa valeur à partir de l'enregistrement.