Exercice 1

1. Déterminer les entiers positifs a et b sachant que $a < 4000$ et que la division euclidienne de a par b donne un quotient de 82 et un reste de 47.
2. Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de $2^{2013} + 562$ par 4.
3. Quand on divise un nombre par 12, le reste est 8. Quand on divise ce même nombre par 10, on augmente le quotient de 1 et le reste devient 2. Quel est ce nombre ?
4. Démontrer que sur la droite $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{8}$, il n'y a pas de points à coordonnées entières.

Exercice 2 Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations suivantes :

1. $x - 1 \mid x + 3$ b) $x + 2 \mid x^2 + 2$.

Exercice 3 Déterminer les entiers relatifs n tels que $n - 4$ divise $3n - 17$.

Exercice 4 Soients n un entier ≥ 2 , p le plus petit diviseur premier de n ;on suppose que :$\sqrt[3]{n} < p < n$.
Montrer que $\frac{n}{p}$ est premier.

Exercice 5 Soients a, b, n trois entiers supérieurs ou égaux à 1. On note q le quotient de la division euclidienne de $a - 1$ par b, et r le reste. Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de $ab^n - 1$ par b^{n+1}.

Exercice 6

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} ... + x + 1)$.
   Dans toute la suite on considère un entier naturel $a \geq 2$.
2. Soit n un entier naturel non nul et d un diviseur positif de n : $n = dk$.
   (a) Montrer que $a^d - 1$ est un diviseur de $a^n - 1$.
   (b) Déduire de la question précédente que $2^{2004} - 1$ est divisible par 7 , par 63 puis par 9 .
3. Soient m et n deux entiers naturels non nuls, et $d = \text{pgdc}(m, n)$.
   (a) On définit m' et n' par $m = dm'$, $n = dn'$ .On appliquant le théorème de Bezout à m' et n' , montrer qu'il existe des entiers relatifs u et v tels que : $mu - nv = d$.
   (b) On suppose que u et v sont > 0
   Montrer que $(a^{mu} - 1) - (a^{nv} - 1)a^d = a^d - 1$.
   Montrer ensuite que $a^d - 1$ est le pgdc de $a^{mu} - 1$ et de $a^{nv} - 1$.
   (c) Calculer, en utilisant le résultat précèdant, le pgdc de $2^{63} - 1$ et de $2^{60} - 1$.

Exercice 7

1. Soit p un nombre premier impair
   (a) Montrer qu'il existe un entier naturel k , non nul ,tel que $2^k \equiv 1\,[p]$.
   (b) Soit k un entier naturel, non nul ,tel que $2^k \equiv 1\,[p]$. et soit n un entier naturel . Montrer que, si k divise n, alors $2^n \equiv 1\,[p]$
   (c) Soit b tel $2^b \equiv 1\,[p]$, b étant le plus petit entier vérifiant cette propriété.
   Montrer en utilisant la division euclidienne de n par b , que si $2^n \equiv 1\,[p]$ alors b divise n .
2. Soit q un nombre premier impair et le nombre $A = 2^q - 1$.
   On prend pour p un facteur premier de A.
   (a) Justifier que $2^q \equiv 1\,[p]$.
   (b) Montrer que p est impair .
   (c) Soit b tel $2^b \equiv 1\,[p]$,b étant le plus petit entier vérifiant cette propriétè.
   Montrer en utilisant 1 que b divise q .En déduire que $b = q$.
   (d) Montrer que q divise $p - 1$, puis montrer que $p \equiv 1\,[q]$.
3. Soit $A_1 = 2^{17} - 1$ .Voici la liste des nombres premiers inférieurs à 400 et qui sont de la forme $34m + 1$ avec m entier non nul : 103 ,137, 239 ,307 . En déduire que A_1 est premier.